

ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III
Final / 19-FEB-2021

1. [2.5 puntos] Un grafo G conexo se dice 2-nodo conectado si no tiene puntos de corte (un nodo que al sacarlo desconecta el grafo). Un grafo G se dice 2-arista conectado si no tiene puentes (una arista que al sacarla desconecta el grafo).
 - (a) Probar que un grafo G es 2-nodo conectado si, y solo si, todo par de nodos de G está en un mismo circuito simple.
 - (b) ¿Es cierto que si un grafo G conexo es 2-nodo conectado entonces es 2-arista conectado? Justificar.
 - (c) ¿Es cierta la recíproca? Justificar.
2. [2.5 puntos] Dado un conjunto de enteros positivos $S = \{s_0 = 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = M\}$, queremos saber si es posible poner estaciones de servicio sobre una autopista de M kilómetros de forma que se cumpla:
 - Una estación de servicio sólo puede ser puesta a distancia $s_i \in S$, para algún $i, 0 \leq i \leq n$, desde el comienzo de la autopista.
 - Debe haber una estación de servicio al comienzo de la autopista ($s_0 = 0$) y al final ($s_n = M$).
 - La distancia entre dos estaciones de servicio consecutivas debe estar entre 15 y 25 kilómetros.

Por ejemplo, si $S = \{0, 15, 40, 50, 60\}$, la respuesta es SI, porque se pueden poner estaciones a las distancias $\{0, 15, 40, 60\}$ desde el comienzo de la autopista.

Mientras que si $S = \{0, 25, 30, 55, 70\}$, entonces la respuesta es NO, porque no hay un subconjunto de S que satisfaga las restricciones pedidas.

 - (a) Dar un algoritmo de programación dinámica que resuelva el problema.
 - (b) Probar su correctitud y calcular su complejidad.
3. [2.5 puntos] Un grafo k -partito completo es un grafo $G = (V, X)$ cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en k subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k ($\bigcup_{i=1}^k V_i = V$, $V_i \neq \emptyset \forall i$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$), de modo que si $u \in V_i$ y $v \in V_j$, para $i \neq j$, entonces $(u, v) \in X$, y si $u, v \in V_i$ entonces $(u, v) \notin X$.
 - (a) ¿Cuál es el número cromático de un grafo k -partito completo?
 - (b) Probar que el algoritmo goloso secuencial aplicado a un grafo k -partito completo produce un coloreo óptimo de G cualquiera sea el orden en que se tomen los vértices.
4. [2.5 puntos] El problema del árbol generador de bajo grado es el siguiente: dado un grafo $G = (V, X)$ y un entero positivo k , ¿ G contiene un árbol generador T tal que para todo vértice $v \in V$ se cumpla que $d_T(v) \leq k$ ($d_T(v)$ es el grado de v en el árbol T)?

¿A qué clase de complejidad pertenece este problema? Justificar.